Kerr-Geodesics with bound orbits

Dr. Petra Schopf

30.10.2017

1 Einleitung

Nach Einstein's revolutionärer Einführung der Raumzeit ([2]) wurden unterschiedliche Metriken dieser Raumzeit gefunden. Hier sollen die Schwarzschild-Metrik ([5]) und die Kerr-Metrik ([3]) genannt sein. Natürlich gibt es differentialgemetrische innere Eigenschaften dieser Raumzeiten. Eigenschaften, unabhängig von Einstein's Wellengleichung oder anderen physikalischen Dingen. Genau diese, nur von der Metrik bestimmten inneren Eigenschaften, sind Gegenstand unserer Betrachtungen.

In [4] betrachtete ich in Schwarzschild-Raumzeiten die Geometrie von bound Geodäten. Unter anderem wurde gezeigt, dass die Orbits aller Geodäten in der Äquatorialebene der Schwarzschild-Raumzeit liegen. Die Schwarzschild-Raumzeit geht von einer "statischen" Situation aus, das Zentrum wird als nicht rotierend angenommen.

Die Kerr-Raumzeit ist genau der Fall eines rotierenden Zentrums. Die Metrik der Raumzeit wird dadurch komplizierter, der metrische Tensor ist keine Diagonalmatrix mehr. Das Koordinatensystem, in dem die Metrik formuliert wird, ist nicht mehr das Kugel-Koordinaten-System sonder ist ein ellipsoidisches Koordinatensystem - die Boyer-Lindquist-Koortdinaten. Folglich liegen die Orbits, wie bereits Chandrasekhar ([1]) zeigte, nicht mehr in der Äquatorialebene. Mehr noch, nicht alle Orbits sind eben.

Betrachtet man als Beispiel einer Kerr-Raumzeit die Milchstrasse, so sind alle Sterne dieser Raumzeit in Form eines Diskes angeordnet. Innerhalb dieses Diskes sind natürlich weitere rotationsabhängige Strukturen sichtbar. Somit ist für eine Gruppe von Geodäten eine bestimmte Ordnung zu erwarten. Wir zeigen hier, tatsächlich, die "Sterne" einer **jeden** Kerr-Raumzeit bilden ein Disk. Genauer, der Orbit einer Geodäte mit bound Orbit liegt in einer Ebene, die **nicht** mit der Äquatorebene zusammenfällt. Je weiter außen der Orbit liegt, desto mehr nähert sich diese Ebene der Äquatorebene. So entsteht die Form eines Diskes.

2 Kerr-Metrik

Die Boyer-Lindquist-Koordinaten sind ellipsoidische Koordinaten eines abgeplatteteen Ellipsoid. Der Zusammenhang zu den kartesischen Koordinaten (Bezugskoordinatensystem) wird gegeben durch

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{r^2+a^2}\sin\vartheta\cos\varphi \\ y &= \sqrt{r^2+a^2}\sin\vartheta\sin\varphi \\ z &= r\cos\vartheta. \end{aligned} \tag{1}$$

Hierbei ist a der Quotient aus dem Drehimpuls L_c des Zentrums und der Gravitationsmasse M des Zentrums

$$a = \frac{L_c}{M}. \tag{2}$$

Die Koordinaten ϑ und φ der Boyer-Lindquist-Koordinaten sind die üblichen Azimutwinkel und Polarwinkel der Kugelkoordinaten. Man beachte, in den Boyer-Lindquist-Koordinaten ist r nicht die übliche Radialkoordinate $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ der Kugelkoordinaten, sondern $r^2 = x^2+y^2+z^2-a^2\sin^2\vartheta$.

Es sei bemerkt, die Äquatorialebene $\vartheta \equiv \pi/2$ der Boyer-Lindquist-Koordinaten ist im Bezugskoordinatensystem die xy-Ebene mit ausgespartem Zentrumskreis mit dem Radius $|a|$

$$\{(r,\vartheta,\varphi) : \vartheta = \frac{\pi}{2}\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \;\&\; x^2+y^2 \geq a^2\} \tag{3}$$

Die **Kerr-Metrik** hat in den Boyer-Lindquist-Koordinaten den metrischen Tensor

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} -(1-\frac{2Mr}{\rho^2}) & 0 & 0 & -\frac{2Mra\sin^2\vartheta}{\rho^2} \\ 0 & \frac{\rho^2}{\Delta^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 & 0 \\ -\frac{2Mra\sin^2\vartheta}{\rho^2} & 0 & 0 & (r^2+a^2+\frac{2Mra^2}{\rho^2}\sin^2\vartheta)\sin^2\vartheta \end{pmatrix} \tag{4}$$

mit

$$\begin{aligned} \rho^2 &= r^2+a^2\cos^2\vartheta \\ \Delta^2 &= r^2-2Mr+a^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Der Einfachheit halber sind die Lichtgeschwindigkeit c und die Gravitationskonstante G gleich Eins gesetzt $G = c = 1$ (geometrische Koordinaten). Für $a \to 0$ ($L_c \to 0$) geht die Kerr-Metrik in die Schwarzschild-Metrik über. Die Kerr-Metrik hat zwei Paarmeter, die Gravitationsmasse M und den Drehimpuls je Gravitationsmasse $a = L_c/M$. Der Parameter a - der spezifische Drehimpuls des Zentrums - wird auch **Kerrparameter** oder **Kerr-Rotation** genannt. Die maximale Kerr-Rotation ist $a^2 = M^2$,

$$0 \leq a^2 \leq M^2. \tag{6}$$

In den Boyer-Lindquist-Koordinaten hat die Kerr-Metrik mehrere Sigularitätsebenen: $\Delta^2 = 0$, $\rho^2 = 0$ und $\rho^2 = 2M$. Diese Singularitätsebenen werden auch **Horizonte** genannt. Sie sind durch folgende Gleichungen bestimmt

$$\begin{aligned} r^{\pm} &= M \pm \sqrt{M^2-a^2} \\ r_S^{\pm} &= M \pm \sqrt{M^2-a^2\cos^2\vartheta} \\ r_0 &= 0 \text{ wenn } \vartheta = \frac{\pi}{2} \end{aligned} \tag{7}$$

Von den beiden Horizonten r^+ und r_S^+ wird die sogenannte **Ergoshäre** begrenzt. In diesem Bereich folgen Materieteilchen intensiv der Rotationsbewegung des Zentrums.

Am Horizont $r_S^\pm$ wechselt der "Zeit-Koeffizient" $g_{00} = g_{tt}$ der Kerr-Metrik das Vorzeichen; außerhalb der Ergesphäre ist das Vorzeichen, wie gewohnt, "-".

Wegen (6) ist

$$0 \leq \Delta^2 \leq (r - M)^2 \leq r^2. \tag{8}$$

Das bedeutet der innere und äußere Ereignishorizont $r^\pm = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$ liegen innerhalb des Schwarzschild-Radius, d.h. bei den meisten Objekten, wie z.B. die Sonne, innerhalb des Objektes.

Der metrische Tensor (g_{ij}) wird zur Diagonalmatrix, wenn die Boyer-Lindquist-Koordinatenvektorfelder ∂_t und ∂_φ durch die beiden kanonischen Vektorfelder V und W ersetzt werden.

Definition 1 (kanonische Vektorfelder) *Die Vektorfelder V und W*

$$\begin{aligned} V &= (r^2 + a^2)\partial_t + a\ \partial_\varphi \\ W &= \partial_\varphi + a \sin^2\vartheta\ \partial_t \end{aligned} \tag{9}$$

*werden **kanonische Vektorfelder** genannt.*

Leicht nachzuprüfen ist, dass

$$\begin{aligned} \partial_t &= \frac{1}{\rho^2}\ V - \frac{a}{\rho^2}\ W \\ \partial_\varphi &= -\frac{a\sin^2\vartheta}{\rho^2}\ V + \frac{r^2 + a^2}{\rho^2}\ W \end{aligned} \tag{10}$$

Wie elementare Berechnungen zeigen, gilt für die kanonischen Vektorfelder

$$\begin{aligned} g(V, W) &= 0 \\ g(V, V) &= -\Delta^2\rho^2 \\ g(W, W) &= \rho^2 \sin^2\vartheta \end{aligned} \tag{11}$$

Theorem 1 (Diagonalform der Kerr-Metrik) *Es sei $(\mathbb{R}^4, g)$ eine Kerr-Raumzeit. Die Vektorfelder*

$$\begin{aligned} \partial_0 &= \frac{1}{\rho\sqrt{|\Delta^2|}}\ V = \frac{1}{\rho\sqrt{|\Delta^2|}}\ \big((r^2 + a^2)\partial_t + a\partial_\varphi\big) \\ \partial_1 &= \frac{\sqrt{\Delta^2|}}{\rho}\ \partial_r \\ \partial_2 &= \frac{1}{\rho}\ \partial_\vartheta \\ \partial_3 &= \frac{1}{\rho\sin\vartheta}\ W = \frac{1}{\rho\sin\vartheta}\ \big(\partial_\varphi + a\sin^2\vartheta\ \partial_t\big) \end{aligned} \tag{12}$$

sind eine orthonormale Basis mit

$$(g_{ij}) = diag\{-sgn\{\Delta^2\},\ sgn\{\Delta^2\},\ 1,\ 1\} \tag{13}$$

3 Geodäten

Es sei

$$\gamma : \mathbb{R} \supset [a,b] \ni t \mapsto \mathbb{R}^4 \tag{14}$$

eine Kurve in $(\mathbb{R}^4, (g_{ij}))$. Sie heißt Geodäte, wenn

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0. \tag{15}$$

Mittels der Christoffel-Symbole Γ^k_{ij} können die Geodätengleichungen folgend dargestellt werden

$$\frac{d^2x_k}{d\tau^2} = -\sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} \frac{dx_i}{d\tau}\frac{dx_j}{d\tau}, \ \ k = 0,1,2,3 \tag{16}$$

Hierbei ist τ die Eigenzeit der Kurve γ und $x_0 = t, x_1 = r, x_2 = \vartheta, x_3 = \varphi$. Wenn (g^{ij}) der zu (g_{ij}) inversen Metrik-Komponenten sind, gilt für die Christoffel-Symbole

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\sum_l g^{lk}\big(-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i}\big) \tag{17}$$

Eingesetzt ergibt sich

$$2\frac{d^2x_k}{d\tau^2} = \sum_{i,j,l} g^{lk}\big(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} - \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i}\big)\frac{dx_i}{d\tau}\frac{dx_j}{d\tau} \tag{18}$$

Umgeformt

$$\frac{d^2x_k}{d\tau^2} + \sum_{j,l} g^{lk}\frac{dg_{jl}}{d\tau}\frac{dx_j}{d\tau} = \frac{1}{2}\sum_{i,j,l} g^{lk}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}\frac{dx_i}{d\tau}\frac{dx_j}{d\tau} \tag{19}$$

Die Matrizen (g_{ij}) und (g^{ij}) sind einander invers, d.h. $\sum_l g_{jl}g^{lk} = \delta_{jk}$. Somit folgt aus (19) die **Geodätengleichung**

$$\sum_l g^{lk}\frac{d}{d\tau}\big[\sum_j g_{jl}\frac{dx_j}{d\tau}\big] = \frac{1}{2}\sum_{i,j,l} g^{lk}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}\frac{dx_i}{d\tau}\frac{dx_j}{d\tau}, \ \ k = 0,...,3 \tag{20}$$

Für die Untersuchung der Geodäten sind die **Erhaltungsgrößen** von besonderer Bedeutung. Die kanonischen Vektorfelder V und W definieren die **charakteristischen Funktionen** R und D von γ:

$$\begin{aligned} R(r) &= -g(V,\ \gamma') = (r^2 + a^2)E - aL,\ r \in \mathbb{R}^+ \\ D(\vartheta) &= g(W,\ \gamma') = L - aE\sin^2\vartheta,\ \vartheta \in [0,\pi) \end{aligned} \tag{21}$$

Definition 2 (Erhaltungsgrößen) *Es seien $(\mathbb{R}^4, g)$ eine Kerr-Raumzeit und γ eine Geodäte in ihr mit der Tangente γ'. Dann sind nachfolgende Größen auf γ konstant*

$$\begin{aligned} g(\partial_\varphi,\ \gamma') &= L,\ \textit{der } \textbf{\textit{Drehimpuls}} \textit{ von } \gamma \\ -g(\partial_t,\ \gamma') &= E,\ \textit{die } \textbf{\textit{Energie}} \textit{ von } \gamma \\ -g(\gamma',\ \gamma') &= Q,\ \textit{der } \textbf{\textit{Typ}} \textit{ von } \gamma \\ \left(\rho^2\frac{d\vartheta}{ds}\right)^2 + a^2Q\cos^2\vartheta + \frac{D^2}{\sin^2\vartheta} &= K,\ \textit{die } \textbf{\textit{Carter-Konstante}} \textit{ von } \gamma \end{aligned} \tag{22}$$

Für die Carter-Konstante K gilt $K \geq 0$ und

$$\begin{aligned} K &= \rho^4(\vartheta')^2 + a^2 Q\cos^2\vartheta + \frac{D^2}{\sin^2\vartheta} \\ &= -\frac{\rho^4}{\Delta^2}(r')^2 - Qr^2 + \frac{R^2}{\Delta^2} \end{aligned} \tag{23}$$

Mit Hilfe der charakteristischen Funktionen und der Erhaltungsgrößen können die Ableitungen der Koordinatenfunktionen einer Geodäte ausgedrückt werden:

Lemma 1 (Koordinatenfunktionen einer Geodäte) *Es seien* $(\mathbb{R}^4, g)$ *eine Kerr-Raumzeit und* γ *eine Geodäte. Dann gelten auf* γ *nachfolgende Beziehungen*

$$\begin{aligned} \rho^2 t' &= aD + \frac{(r^2+a^2)}{\Delta^2}R \\ \rho^2\varphi' &= \frac{1}{\sin^2\vartheta}D + \frac{a}{\Delta^2}R \\ \left(\rho^2 r'\right)^2 &= -\Delta^2(Qr^2+K) + R^2 \\ \left(\rho^2\vartheta'\right)^2 &= K - a^2\cos^2\vartheta Q - \frac{1}{\sin^2\vartheta}D^2 \end{aligned} \tag{24}$$

Elementare Umformungen der vorletzten Gleichung ergeben

$$E^2 = \left(\rho^2 r'\right)^2 + \big(1 - \frac{2M}{r}\big)\big(1 + \frac{K}{r^2}\big) + \frac{a^2(K-(L-aE)^2)}{r^4} + \frac{2aE(L-aE)+a^2}{r^2} \tag{25}$$

Der Ausdruck

$$V_\gamma(r) = \big(1 - \frac{2M}{r}\big)\big(1 + \frac{K}{r^2}\big) + \frac{a^2(K-(L-aE)^2)}{r^4} + \frac{2aE(L-aE)+a^2}{r^2} \tag{26}$$

wird auch **Potentialfunktion** von γ genannt und die Gleichung (25) **Energiegleichung**.

Die beiden letzten Gleichungen aus (24) kombiniert ergeben

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sin\vartheta\ d\vartheta}{\sqrt{K\sin^2\vartheta - a^2Q\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta - D^2}}\right)^2 &= \left(\frac{dr}{\sqrt{R^2 - \Delta^2(Qr^2+K)}}\right)^2 \\ \pm\frac{d(\cos\vartheta)}{\sqrt{K\sin^2\vartheta - a^2Q\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta - D^2}} &= \frac{dr}{\sqrt{R^2 - \Delta^2(Qr^2+K)}} \end{aligned} \tag{27}$$

Damit erfüllt die Projektion der Geodäte γ auf die (r,ϑ)-Ebene die folgende Gleichung

$$\pm\int_{\vartheta(0)}^{\vartheta(\tau)} \frac{d(\cos\vartheta)}{\sqrt{K\sin^2\vartheta - a^2Q\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta - D^2}} = \int_{r(0)}^{r(\tau)} \frac{dr}{\sqrt{R^2 - \Delta^2(Qr^2+K)}} \tag{28}$$

Die Gleichung (28) wird im Weiteren auch mit

$$f_\vartheta(\vartheta) = f_r(r) \tag{29}$$

bezeichnet.

Chandrasekhar ([1]) hat diese beiden Integrale ausgiebig für verschiedene integrierbare Situationen diskutiert, die linke Seite nennt er ϑ-motion und die rechte r-motion. Wir notieren hier nur für die θ-Motion die Stammfunktion (die wir wieder mit $f_\vartheta(\vartheta)$ bezeichnen)

$$f_\vartheta(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{a^2(Q - a^2E^2)\eta_+}}\ F(\arcsin\frac{\cos\vartheta}{\sqrt{\eta_-}};\ \sqrt{\frac{\eta_-}{\eta_+}}) \tag{30}$$

mit

$$\eta_\pm = \frac{K + a^2Q + 2aE(L - aE)}{2a^2(Q - a^2E^2)} \pm \sqrt{\left(\frac{K + a^2Q + 2aE(L - aE)}{2a^2(Q - a^2E^2)}\right)^2 - \frac{K - (L - aE)^2}{a^2(Q - a^2E^2)}} \tag{31}$$

Es sei darauf hingewiesen, dass die beiden Ausdrücke in den Wurzeln nicht negativ sind. Wegen Lemma 1 sind beide Ausdrücke Quadratzahlen.

3.1 Geodäten in der Äquatorebene

Eine besondere Gruppe von Kerr-Geodäten "beginnt" in der Äquatorialebene.

Definition 3 (äquatorial beginnend) *Es seien $(\mathbb{R}^4, g)$ eine Kerr-Raumzeit und γ eine Geodäte. Die Geodäte heißt äquatorial beginnend (relativ zu den sphärischen Koordinaten ϑ, φ auf S^2), wenn*

$$\vartheta(0) = \frac{\pi}{2}\ \textit{und}\ \frac{d\vartheta}{d\tau}(0) = 0 \tag{32}$$

Äquatorial beginnend bedeutet geometrisch, der Startpunkt und die Tangente im Startpunkt liegen im Raumteil in der Äquatorialebene ($\vartheta \equiv \pi/2$).

$\vartheta \equiv \pi/2$ erfüllt die Gleichung (20). Ist die Geodäte äquatorial beginnend, folgt aus der Eindeutigkeit der Lösung als Randwertaufgabe, dass der Orbit einer äquartorial beginnende Geodäte vollständig in der Äquatorialebene liegt. Somit gilt

Lemma 2 *Es seien $(\mathbb{R}^4, g)$ eine Kerr-Raumzeit und γ eine Geodäte. Die Geodäte ist äquatorial beginnend dann undnur dann, wenn der Orbit $\vec{\gamma}$ vollständig in der Äquatorialebene*

$$\vec{\gamma} \subset \{\vartheta \equiv \frac{\pi}{2}\} \tag{33}$$

liegt.

Es sei γ eine äquatorial beginnende (bezüglich der Boyer-Lindquist-Koordinaten) Geodäte der Kerr-Raumzeit $(\mathbb{R}^4, g)$. Dann ist auf γ $\vartheta' = 0$ und $\vartheta = \pi/2$. Somit vereinfachen sich die kanonischen Funktionen D und R und die Carter-Konstante K zu

$$\begin{aligned}
&\rho^2 = r^2\\
&\Delta^2 = r^2 + a^2 - 2Mr = r(r - 2M) + a^2\\
&D = D(\vartheta) = L - aE\\
&R = R(r) = (r^2 + a^2)E - aL\\
&K = D^2 = (L - aE)^2
\end{aligned} \tag{34}$$

sowie (24) wird zu

$$
\begin{aligned}
r^2 t' &= a(L - aE) + (r^2 + a^2)\frac{(r^2 + a^2)E - aL}{r^2 + a^2 - 2Mr} \\
r^2 \varphi' &= L - aE + a\frac{(r^2 + a^2)E - aL}{r^2 + a^2 - 2Mr} \\
r^4 (r')^2 &= \big((r^2 + a^2)E - aL\big)^2 - (r^2 + a^2 - 2Mr)(Qr^2 + (L - aE)^2) \\
&= r\Bigg((E^2 - Q)r^3 + 2MQr^2 + (a^2 Q - L^2 + a^2 E^2)r + 2M(L - aE)^2\Bigg) \\
r^4 (\vartheta')^2 &= 0
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Da die rechte Seite der Gleichung für r' positiv sein muss, folgt für bound Geodäten $E^2 \leq Q$. In der Äquatorialebene ist die Ergosphäre der Kreisring (in den Boyer-Lindqiust-Koordinaten) $\{(r, \pi/2, \varphi) : M + \sqrt{M^2 - a^2} \leq r \leq 2M\}$.

Für Geodäten deren Orbit in der Äquatorebene verliert (27) seinen Inhalt. Aus (35) folgt

$$
\big(d\varphi\big)^2 = \frac{r(Lr - 2M(L - aE))^2}{\Delta^2\Bigg((E^2 - Q)r^3 + 2MQr^2 + (a^2 Q - L^2 + a^2 E^2)r + 2M(L - aE)^2\Bigg)} \big(dr\big)^2 \tag{36}
$$

Somit kann für Äquatorial-Geodäten $r = r(\varphi)$ als eine Funktion des Azimutwinkels φ betrachtet werden.

3.2 Geodäten von Materieteilchen außerhalb der Äquatorebene

In der Kerr-Raumzeit existieren - anders als in der Schwarzschild-Raumzeit - Geodäten mit Orbit außerhalb der Äquatorebene. Für eine Geodäte mit einem Orbit außerhalb der Äquatorebene gilt

$$
K \neq (L - aE)^2. \tag{37}
$$

Wir nehmen im Weiteren an, dass die Geodäte nach der Eigenzeit τ ($d\tau^2 = -ds^2$) parametrisiert ist. Die Erhaltungsgröße Q ist dann gleich Eins, $Q = 1$. Es sei in den Boyer-Lindquist-Koordinaten $\gamma = (t(\tau), r(\tau), \vartheta(\tau), \varphi(\tau))$ eine nach der Eigenzeit parametrisierte bound Geodäte. Als bound Geodäte hat die Koordinatenfunktion ein Minimum (Perihel) und Maximum (Apohel), d.h. im Apo- und Perihel gilt $r' = 0$. Wegen (24) ist dann im Peri- und Apohel $\Delta^2(r^2 + K) = R^2$:

$$
\Delta^2(r^2 + K) = ((r^2 + a^2)E - aL)^2, \text{ im Apo- und Perihe.} \tag{38}
$$

Auf der Geodäte γ gilt die Gleichung (28). Diese hat die impliziete Form

$$
f_\vartheta(\vartheta) = f_r(r), \ \vartheta \in [0, \pi) \text{ und } r \in \mathbb{R}^+ \tag{39}
$$

Für die Radiusfunktion $r(\tau)$ sind Peri- und Apohel lokale Extremwerte. Das bedeutet im Apo- und Perihel ist $r' = 0$. Aus der Gleichung (28) folgt somit

$$\frac{df_\vartheta}{d\vartheta}\,\vartheta'\Big|_{Apo-Perihel} = \frac{df_r}{dr}\,r'\Big|_{Apo-Perihel} = 0 \tag{40}$$

Aus (30) folgt

$$\frac{df_\vartheta}{d\vartheta} = \frac{1}{\sqrt{a^2(1-a^2E^2)(\eta_+ - \cos^2\vartheta)}} \tag{41}$$

Folglich sind Apo- und Perihel auch lokale Extremwerte der Koordinatenfunktion $\vartheta(\tau)$. Aus (24) folgt im Apo- und Perihel

$$\begin{aligned}
K &= a^2\cos^2\vartheta + \frac{1}{\sin^2\vartheta}D^2 \\
K\sin^2\vartheta &= a^2(1-\sin^2\vartheta)\sin^2\vartheta + \left(L - aE\sin^2\vartheta\right)^2 \\
0 &= a^2(1-E^2)\sin^4\vartheta + (K - a^2 + 2aEL)\sin^2\vartheta - L^2 \\
\sin^2\vartheta &= -\frac{K-a^2+2aEL}{2a^2(1-E^2)} \pm \sqrt{\frac{\left(K-a^2+2aEL\right)^2 + 4a^2L^2(1-E^2)}{4a^4(1-E^2)^2}} \\
\sin^2\vartheta &= -\frac{1}{2a^2(1-E^2)}\left(K - a^2 + 2aEL \pm \sqrt{(K-a^2)^2 + 4aELK + 4a^2L(L-aE)}\right)
\end{aligned} \tag{42}$$

Wenn eine Lösung $\vartheta_h \in [0,\pi)$ existiert, ist $\pi - \vartheta_h$ die zweite Lösung. Damit eine Lösung existiert müssen einige Bedingungen erfüllt sein. Da $E^2 < 1$ kann hier nur das "+"-Zeichen gelten Im Apo- und Perihel muss folglich gelten

$$\begin{aligned}
0 \le a^2 - K - 2aEL + \sqrt{(K-a^2)^2 + 4aELK + 4a^2L(L-aE)} &\le 2a^2(1-E^2) \\
\sqrt{(K-a^2)^2 + 4aELK + 4a^2L(L-aE)} &\le K + a^2 + 2aE(L-aE)
\end{aligned} \tag{43}$$

Insbesondere gilt somit

Lemma 3 *Es seien* $(\mathbb{R}^4, g)$ *eine Kerr-Raumzeit mit der Kerr-Konstante* a *und* γ *eine Geodäte mit bound Orbit. Wenn* E*,* L *und* K *die Energie, der Drehimpuls und die Carter-Konstante von* γ *sind, gilt*

$$K + a^2 + 2aE(L-aE) \ge 0. \tag{44}$$

Die Energiegleichung (25) umgeformt gibt

$$\begin{aligned}
E^2 &\ge V_\gamma(r) \\
E^2 &\ge 1 - \frac{2M}{r} + \frac{K}{r^2} - \frac{2MK}{r^3} + \frac{a^2(K-(L-aE)^2)}{r^4} + \frac{2aE(L-aE)+a^2}{r^2}
\end{aligned} \tag{45}$$

Da

$$r^5 V_\gamma' = 2Mr^3 - 2Kr^2 + 6MKr - 4a^2(K-(L-aE)^2) - (4aE(L-aE)+a^2)r^2 \to_{r\to+\infty} +\infty \tag{46}$$

ist V_γ für große r monoton wachsend und gegen $1-0$ konvergierend. Für eine bound Geodäte muss V_γ eine "Potentialmulde" bilden. Somit gilt für eine bound Geodäte

Lemma 4 *Es seien $(\mathbb{R}^4, g)$ eine Kerr-Raumzeit mit der Kerr-Konstante a und γ eine Geodäte mit bound Orbit. Wenn E die Energie von γ ist, gilt*

$$E^2 \leq 1. \tag{47}$$

Theorem 2 (Orbitalebene) *Es sei $(\mathbb{R}^4, g)$ eine Kerr-Raumzeit und γ eine nach der Eigenzeit parametrisierte bound Geodäte. Dann existiert im Raumteil (im Bezugskoordinatensystem) eine Ebene durch den Koordinatenursprung in der der Orbit $\vec{\gamma}$ der Geodäte enthalten ist. Der Polarwinkel der Normale dieser Ebene konvergiert gegen Null, wenn das Perihel der Geodäte gegen $+\infty$ tendiert.*

Proof. Die Kerr-Metrik ist invariant bezüglich Rotationen um die z-Achse. So können wir annehmen, dass das Perihel die Boyer-Lindquist-Koordinaten $(r_h, \vartheta_h, \pi/2)$ hat. Wir betrachten die Ebene p_h durch Koordinatenursprung und Perihel

$$p_h = \{(r, \vartheta, \varphi) : \sin\theta \sin\vartheta \sin\varphi + \cos\theta\cos\vartheta = 0\} \tag{48}$$

mit $\theta = \vartheta_h + \pi/2$. Die Normale der Ebene p_h ist $(1, \theta, \pi/2)$, das Perihel liegt in dieser Ebene. Wenn Peri- und Apohel auf einer Geraden liegen, dann liegen Apo- und Perihel (der Polarwinkel des Apohels ist $\pi - \vartheta_h$) in dieser Ebene, auf der x-Achse.

Die Funktion $\tilde{\vartheta} = \tilde{\vartheta}(\tilde{\varphi})$ sei indirekt durch

$$\sin\theta \sin\tilde{\vartheta} \sin\tilde{\varphi} + \cos\theta \cos\tilde{\vartheta} = 0 \tag{49}$$

mit $\theta = \vartheta_h + \pi/2$ gegeben. Die Funktion $\tilde{\varphi}(\tau)$ bestimmen wir mit dem Anfangswert $\tilde{\varphi}(0) = \pi/2$ als Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} K - a^2\cos^2\tilde{\vartheta}(\tilde{\varphi}) - \frac{(L - aE\sin^2\tilde{\vartheta}(\tilde{\varphi}))^2}{\sin^2\tilde{\vartheta}(\tilde{\varphi})} &= (\tan\theta \sin^2\tilde{\vartheta}(\tilde{\varphi})\cos\tilde{\varphi})^2 \big(\rho^2 \frac{d\tilde{\varphi}}{d\tau}\big)^2 \\ &= \cos^2\theta \sin^2\tilde{\vartheta}\cos^2\tilde{\vartheta} \left(\rho^2 \frac{d\tilde{\varphi}}{d\tau}\right)^2 \end{aligned} \tag{50}$$

Hierbei ist $\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\tilde{\vartheta}(\tilde{\varphi})$, wobei $r = r(\tau)$ die Koordinatenfunktion der Geodäte γ ist. Mit $\tilde{\gamma}$ bezeichnen wir mit den Koordinatenfunktionen der Geodäte γ die Kurve

$$\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \supset [0, 1] \ni \tau \mapsto (t(\tau), r(\tau), \tilde{\vartheta} \circ \tilde{\varphi}(\tau), \varphi(\tau)) \tag{51}$$

Offensichtlich gilt $\tilde{\vartheta} \circ \tilde{\varphi}(0) = \pi/2$ und wegen der Definitionsgleichungen der Funktionen $\tilde{\vartheta}$ und $\tilde{\varphi}$

$$\begin{aligned}
\left(\rho^2 \frac{d(\tilde{\vartheta} \circ \tilde{\varphi})}{d\tau}\right)^2 &= \left(\frac{d\tilde{\vartheta}}{d\tilde{\varphi}}\right)^2 \left(\rho^2 \frac{d\tilde{\varphi}}{d\tau}\right)^2 \\
&= \tan^2 \theta \sin^4 \tilde{\vartheta} \cos^2 \tilde{\varphi} \left(\rho^2 \frac{d\tilde{\varphi}}{d\tau}\right)^2 \\
&= \cos^2 \theta \sin^4 \tilde{\vartheta} \cos^2 \tilde{\vartheta} \left(\rho^2 \frac{d\tilde{\varphi}}{d\tau}\right)^2 \\
&= K - a^2 \cos^2 \tilde{\vartheta}(\tilde{\varphi}) - \frac{(L - aE \sin^2 \tilde{\vartheta}(\tilde{\varphi}))^2}{\sin^2 \tilde{\vartheta}(\tilde{\varphi})}
\end{aligned} \tag{52}$$

Wegen (24) sind die Koordinatenfunktionen $\vartheta(\tau)$ der Geodäte γ und $\tilde{\vartheta} \circ \tilde{\varphi}(\tau)$ Lösungen der Differentialgleichung

$$\left(\rho^2 \frac{d\vartheta}{d\tau}\right)^2 = K - a^2 \cos^2 \vartheta - \frac{(L - aE \sin^2 \vartheta)^2}{\sin^2 \vartheta} \tag{53}$$

mit dem gleichen Anfangswert in $\tau = 0$. Folglich

$$\vartheta(\tau) \equiv \tilde{\vartheta} \circ \tilde{\varphi}(\tau) \tag{54}$$

und der Orbit von γ liegt vollständig in der Ebene p_h.

Wie oben als Folgerung aus (42) bereits bemerkt, ändert sich die θ-Koordinate von γ im Bereich von θ_h bis $\pi - \theta_h$; $\vartheta(\tau) \in [\theta_h,\ \pi - \theta_h]$. Sind r_p und r_a Peri- und Apohel, so $r(\tau) \in [r_p,\ r_a]$. Folglich ist wegen (28) und (30)

$$\frac{2}{\sqrt{a^2(Q - a^2E^2)\eta_+}}\, F(\arcsin \frac{\cos \vartheta_h}{\sqrt{\eta_-}};\ \sqrt{\frac{\eta_-}{\eta_+}}) = \pm \int_{r_p}^{r_a} \frac{dr}{\sqrt{R^2 - \Delta^2(Qr^2 + K)}} \tag{55}$$

Konvergiert das Perihel zu $+\infty$, so wird die rechte Seite unendlich klein. Demzufolge nähert sich ϑ_h dem Wert $\pi/2$.
q.e.d.

Geometrisch bedeutet dies, die Orbitalebenen (Ebene in der der Orbit liegt) für weiter außen liegende Orbits zur Äquatorialebene tendieren. Anders gesagt, die Sterne eines rotierenden schwarzes Loches - insbesondere der Milchstrasse - haben die Form eines Disks.

Literatur

[1] Subrahmanyan Chandrasekhar: *The mathematical theory of black holes*, Oxford University Press, 1983, 1992.

[2] Albert Einstein: *Die formale Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*,
Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte, S. 1030 - 1085, 1914.

[3] Roy P. Kerr: *Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics*,
Physical Review Letters. Band 11, 1963, S. 237?238.

[4] Dr. Petra Schopf: *Strukturen mit Schwarzschild-Raumzeiten*,
Pro BUSINESS, 2017

[5] Karl Schwarzschild: *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie.*
Reimer, S. 189ff, Sitzungsberichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1916.